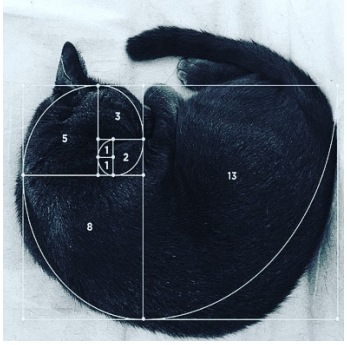
Kot Leonarda



#ciąg_Fibonacci'ego
#tablica
#rekurencja
#pętla_for

Pod koniec XII w. w Pizie w rodzinie dyplomaty o nazwisku Bonacci, urodził się chłopiec o imieniu Leonardo. Z racji obowiązków służbowych ojca podróżował z nim po wielu krajach Afryki Północnej i Europy. Nie zaniedbywał wszakże nauki, pobierając lekcje od najlepszych nauczycieli. W tamtych czasach nauka arabska i hinduska (zwłaszcza matematyka) były absolutnie na topie, więc młody Leonardo mógł poznać ich najważniejsze tajniki. Po powrocie do rodzinnej Pizy sam zaczął publikować rozprawy matematyczne, w tym sławne *Liber abaci* (wymawiaj: *liber abaci*, z twardym **c**), w którym opisał między innymi ciąg liczb naturalnych nazwany później jego imieniem.* Współczesna matematyka, a zwłaszcza arytmetyka, wiele zawdzięcza jego dziełom.

Ciąg Fibonacci'ego jest zdefiniowany w bardzo prosty sposób.† Oznaczymy jego kolejne wyrazy przez $F_0, F_1, F_2, \ldots$ i podamy taki oto przepis na ich obliczanie:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0, \\ F_1 &= 1, \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \text{dla } n \geqslant 2. \end{aligned}$$

Notabene, taki wzór jest przykładem *metody rekurencyjnej*, czyli odwołującej się samej do siebie – temu zagadnieniu poświęcimy oddzielny podrozdział.

Kolejne wyrazy ciągu przedstawiają się następująco:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

Spróbujemy napisać program, który oblicza i wypisuje pewną ilość wyrazów tego ciągu. Zrobimy to w dwóch etapach: najpierw wyliczymy wyrazy ciągu i zapiszemy je w tablicy, a następnie wypiszemy na ekranie.

Załóżmy, że chcemy wyliczyć liczby od F_0 do F_{20} – oznacza to, że potrzebujemy miejsca na 21 liczb, czyli tablicy liczb całkowitych o takim właśnie rozmiarze (nazwiemy ją $F[\,]$, jak we wzorze).

*Fibonacci (wymawiaj: *fibonaczczi*) – od łacińskiego *Filius Bonacci* czyli *syn Bonacci'ego*.

†Rzeczy fundamentalne często wykazują się bardzo prostą konstrukcją. Ciąg ten pojawia się w niezliczonych zagadnieniach matematycznych i informatycznych, ale także znajdziemy go w botanice i zoologii (choćby w budowie szyszek, słoneczników czy muszli ślimaka) oraz w sztuce (złoty podział, *Człowiek witruwiański* Leonarda da Vinci).

Zatem w naszym programie powinna znaleźć się taka oto deklaracja:

```
const int MAX = 20;
int F[MAX + 1];
```

Tablica (ang. **array**, wymawiaj: *arej*, z akcentem na *e*) jest podstawową strukturą danych dostępną w każdym języku programowania. Komórki tablicy o rozmiarze d ponumerowane są od 0 do $d-1$, jak w znanym nam już ciągu znaków (`string`). Jednak dla tablic jako takich nie ma funkcji `length()`, zwracającej rozmiar tablicy.

Rozmiar tablicy jest wielkością stałą (stąd `const`, wymawiaj: *konst*), jednak zdefiniowanie i dalsze konsekwentne używanie stałej `MAX` jest zalecanym zwyczajem, gdyż kompilator wykryje na przykład próbę jej zmiany poniżej w kodzie, a gdyby nam przyszła ochota wyliczyć inną ilość tych liczb, wtedy łatwo o korektę. Tak samo nazewnictwo: nazwy stałych piszemy wielkimi literami.

Początkowe dwie wartości w tablicy wpisujemy ręcznie:

```
F[0] = 0;
F[1] = 1;
```

Każdą następną wartość będziemy już wyliczać jako sumę dwóch poprzednich, czyli:

```
F[n] = F[n - 1] + F[n - 2];
```

Tę instrukcję umieścimy w pętli i jest to okazja, aby poznać nowy rodzaj pętli, niezwykle często używany przez programistów: pętlę `for` (z ang. *dla*). Jej składnia jest następująca:

```
for(instrukcja1; warunek; instrukcja2)
{
  treść_pętli
}
```

Co to jest *treść_pętli*, to chyba jasne. Otaczające ją nawiasy klamrowe można pominąć, jeśli w treści pętli mamy pojedynczą instrukcję.

W każdej pętli występuje warunek kontynuacji – tutaj *warunek*, czyli zdanie logiczne – póki prawdziwe, póty pętla się kręci. W naszym przypadku warunek powinien mieć postać:

```
n <= MAX
```

bo w takim zakresie obliczamy wyrazy ciągu.

Czas na część sterującą pętli: *instrukcja1* jest wykonywana przed rozpoczęciem wykonywania całej pętli, zatem na ogół zawiera ona deklarację i inicjalizację potrzebnych zmiennych. W tym przykładzie mogłaby wyglądać tak:

```
int n = 2
```

Z kolei *instrukcja2* jest wykonywana po każdym obiegu pętli, czyli po każdorazowym wykonaniu jej treści. Narzuca się, aby zawrzeć w niej powiększanie (lub pomniejszanie) istotnych zmiennych o 1, choć oczywiście można tu wstawić cokolwiek. W naszym przypadku użyjemy wyrażenia `n++`.

Cała pętla powinna wyglądać tak:

```
for(int n = 2; n <= MAX; n++)
  F[n] = F[n - 1] + F[n - 2];
```

Po wygenerowaniu wszystkich (zamierzonych) liczb Fibonacci'ego powinniśmy je wypisać na ekranie. Użyjemy do tego analogicznej pętli `for`, ale z wartością początkową $n = 0$.

Możemy więc już przedstawić pełny program dla tego problemu:

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main()
{
  const int MAX = 20;
  int F[MAX + 1];
  F[0] = 0;
  F[1] = 1;
  for(int n = 2; n <= MAX; n++)
    F[n] = F[n - 1] + F[n - 2];
  for(int n = 0; n <= MAX; n++)
    cout << n << " " << F[n] << endl;
}
```

Po uruchomieniu programu na ekranie zobaczymy takie liczby:

```
0 0
1 1
2 1
3 2
4 3
5 5
6 8
7 13
8 21
9 34
10 55
11 89
12 144
13 233
14 377
15 610
16 987
```

```
17 1597
18 2584
19 4181
20 6765
```